Tentamen

Elektriciteit en Magnetisme 1

Woensdag 22 juni 2011

09:00-12:00

Schrijf op *elk* vel uw naam en studentnummer.

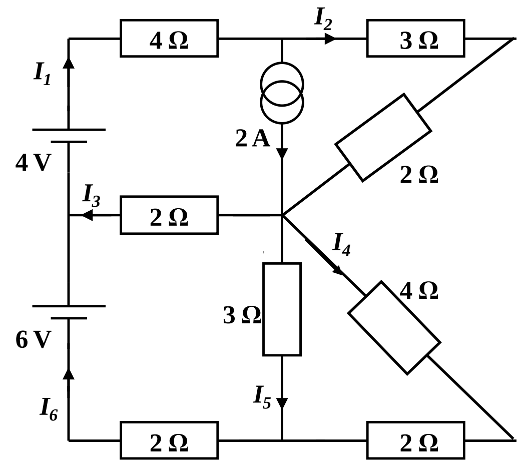
Schrijf leesbaar.

Maak elke opgave op een *apart* vel.

Dit tentamen bestaat uit 4 vragen. Alle vier vragen hebben een gelijk gewicht.

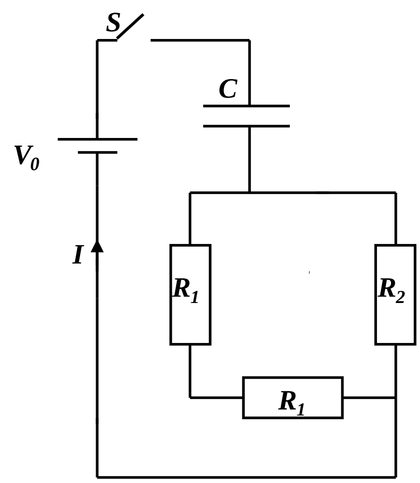
OPGAVE 1
Punten: a+b+c+d=5+4+4+5=18

Gegeven is de getekende schakeling.



a) Geef 6 onafhankelijke vergelijkingen voor I_1, …I_6. De vergelijkingen hoeven niet te worden opgelost.

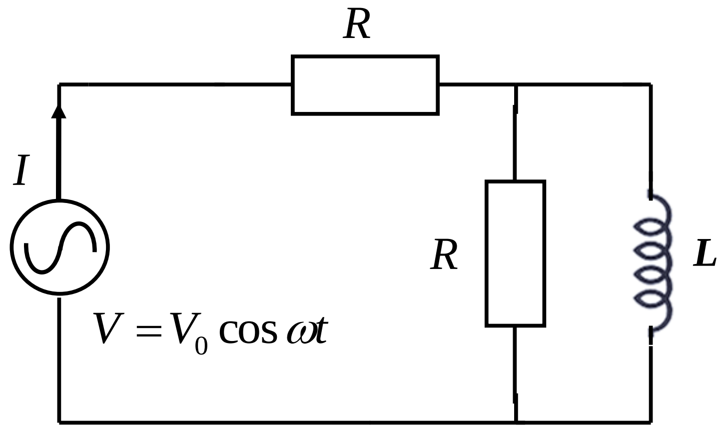
Een gelijkspanningsbron is aangesloten op drie weerstanden en een condensator (zie de getekende schakeling). Voor de weerstanden geldt $R_1 = R, R_2 = 2R$. Aanvankelijk is de schakelaar S geopend en is de condensator ongeladen. Op $t = 0$ wordt de schakelaar gesloten.

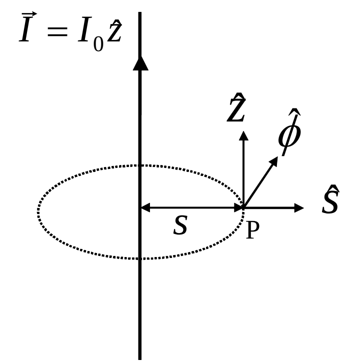


b) Geef de begin- ($t = 0$) en eindwaarde ($t = \infty$) van de stroom I. Geef een uitleg van je antwoord.
c) Bereken I voor $t \geq 0$. Druk je antwoord uit in R, C en V_0.

Gegeven is de hieronder getekende schakeling voor een stationaire wisselspanningsbron die in de reële schrijfwijze beschreven wordt door $V = V_0 \cos(\omega t)$.

d) Geef de stroom I in zowel de complexe als de reële schrijfwijze.





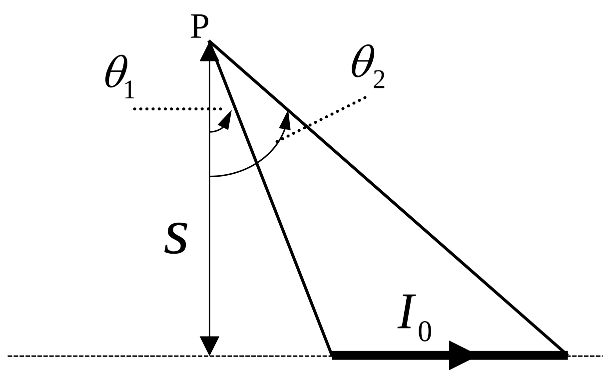
OPGAVE 2
Punten: a+b+c+d=3+4+5+6=18

Door een oneindig lange draad in de z-richting loopt een stroom $\vec{I} = I\hat{z}$ (zie nevenstaande figuur).

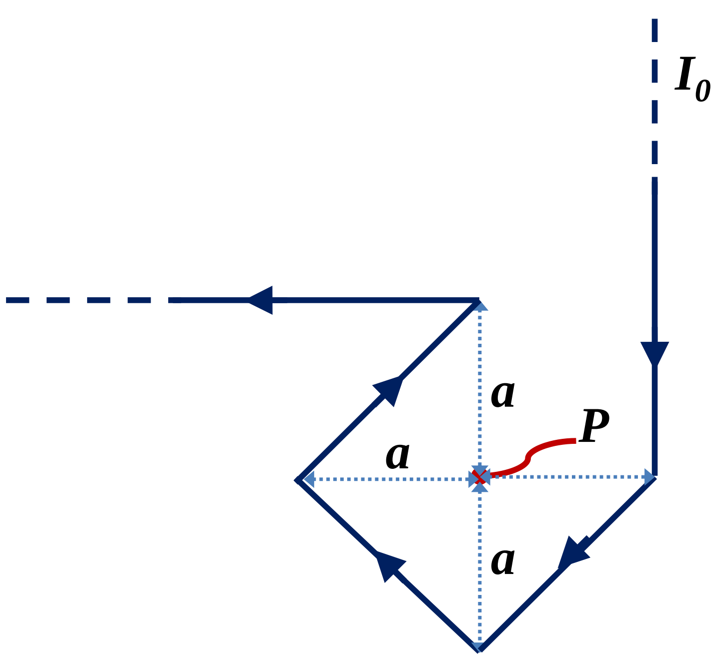
a) Geef de wet van Ampère voor het magnetische veld $\vec{B}$ in integrale vorm.
b) Leid hieruit de wet van Ampère in differentiële vorm af.
c) Bepaal de grootte en de richting van het magnetisch veld $\vec{B}$ in het punt P op afstand s van de draad.

De grootte van het magneetveld in punt P op afstand s van een eindige draad waardoor een stroom I_0 loopt (zie nevenstaande figuur) wordt gegeven door,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$



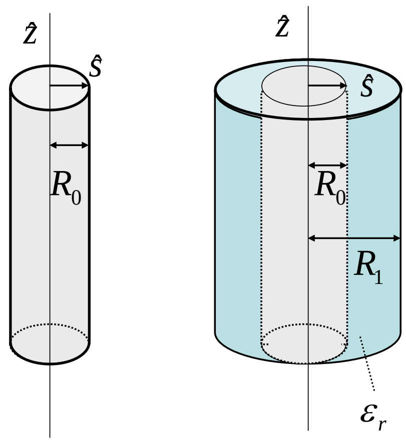
d) Gebruik deze vergelijking om de grootte en richting van het magnetisch veld te bepalen in het punt P in onderstaande figuur. Als we de stroom van rechtsboven naar links volgen dan zijn de hoeken in de oneindige stroomdraad respectievelijk 135°, 90°, 90° en 45°. De grootte van het magnetische veld moet uitgedrukt worden in I_0, a, en μ_0. Geef de richting van het veld ten opzichte van het papier, dus links, rechts, boven, onder, uit of in.



OPGAVE 3

Punten: a+b+c+d=5+4+5+4=18

Gegeven een oneindige cilinder met straal R_0 (zie figuur a). De ladingsverdeling in de cilinder kan worden beschreven door $\rho(s) = \rho_0 f(s)$.



a) **b)**

a) Bepaal het elektrisch veld $\vec{E}$ binnen en buiten de cilinder als $f(s) = 1$.
b) Bepaal het elektrisch veld $\vec{E}$ binnen en buiten de cilinder als $f(s) = \frac{1}{1+\alpha s}$.

Stel nu dat de cilinder omringd wordt door een holle cilinder met binnenstraal R_0 en buitenstraal R_1 (zie figuur b). Deze holle cilinder bestaat uit een diëlektricum met relatieve diëlektrische constante ε_r.

c) Bepaal de diëlektrische verplaatsing $\vec{D}$ en het elektrisch veld $\vec{E}$ in de holle cilinder voor het geval $f(s) = 1$.
d) Bepaal alle gebonden lading in de holle cilinder voor het geval $f(s) = 1$.

$$\int \frac{1}{1+ax}dx = \frac{\ln(1+ax)}{a}$$

$$\int \frac{x}{1+ax}dx = \frac{ax - \ln(1+ax)}{a^2}$$

$$\int \frac{x^2}{1+ax}dx = \frac{ax(ax-2) + 2\ln(1+ax)}{2a^3}$$

OPGAVE 4

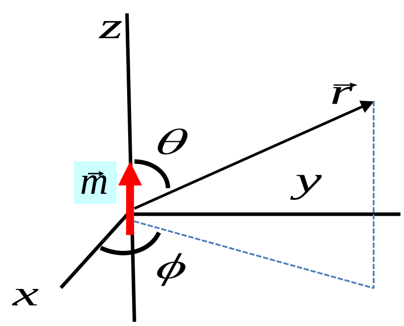
Punten: a+b+c+d+e+f=2+2+2+4+4+4

In deze cursus zijn de scalaire potentiaal $V(\vec{r})$ ten gevolge van een ladingsverdeling en de vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$ ten gevolge van een stroomverdeling ontwikkeld in de volgende sommen.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{K_1}{r} + \frac{K_2}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots \ldots .\right]$$

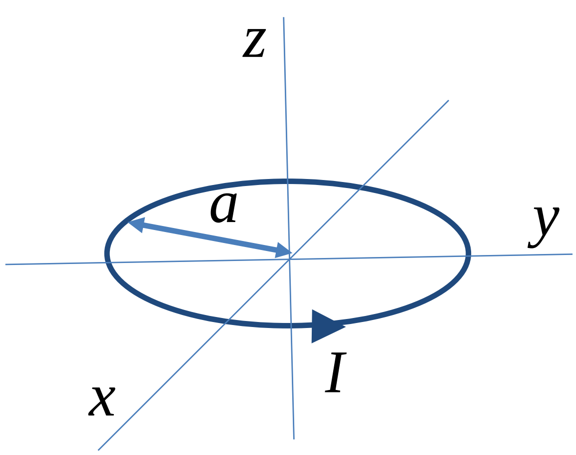
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{\vec{L}_1}{r} + \frac{\vec{L}_2}{r^2} + \frac{\vec{L}_2}{r^3} + \cdots \ldots .\right]$$

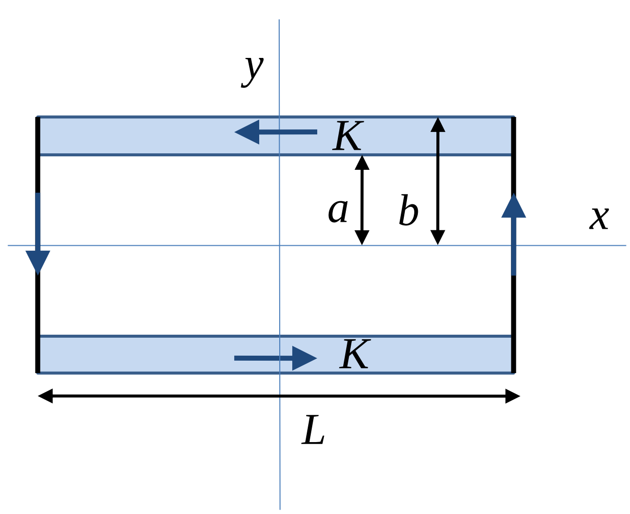
a) Beschrijf in woorden wat het doel is van deze ontwikkeling.
b) Schrijf op wat je weet over K_1 en $\vec{L}_1$.
c) De tweede term in de ontwikkeling wordt de dipoolterm genoemd. Leg uit wat het verschil is tussen een mathematische (of pure dipool) en een fysische dipool.
d) De vector $\vec{L}_2$ in tweede term in de ontwikkeling van de vectorpotentiaal kan geschreven worden als $\vec{L}_2 = \vec{m} \times \hat{r}$ waarbij $\vec{m} = I\int d\vec{a}$ het magnetisch dipool moment is. Geef een uitdrukking in *bolcoördinaten* van het magnetische veld $\vec{B}$ van een magnetische (pure) dipool $\vec{m} = m\hat{z}$ in de oorsprong (zie nevenstaande figuur).



Bepaal het magnetisch dipoolmoment in de volgende twee situaties.

e) Een cirkelvormige stroomkring in het *xy*-vlak met straal *a* (figuur onder links).
f) Twee dunne linten met breedte $b - a$ en lengte L zijn aan de zijden aan elkaar verbonden door een stroomdraad (figuur onder rechts). Over de linten loopt een uniforme oppervlaktestroom *K*.





Uitwerkingen

Opgave 1

Onderdeel a)
Er zijn vier knooppunten die leveren de volgende vergelijkingen (Kirchhoff 1);

K1: $I_6 + I_3 - I_1 = 0$
K2: $I_1 - 2 - I_2 = 0$
K3: $2 + I_2 - I_4 - I_5 - I_3 = 0$
K4: $I_5 + I_4 - I_6 = 0$

Hiervan zijn er drie onafhankelijk. We kunnen willekeurig een vergelijking weglaten. Je ziet bijvoorbeeld meteen dat K1+K2+K4 identiek is aan K3.

Er zijn vier mazen. We gebruiken de truuk dat we de stroombron voor de mazenwet kunnen weglaten. Dan blijven er drie mazen over. Hierop passen we Kirchhoff 2 (met de klok mee) toe en vinden:

M1: $4 - 4I_1 - 3I_2 - 2I_2 - 2I_3 = 4 - 4I_1 - 5I_2 - 2I_3 = 0$
M2: $6 + 2I_3 - 3I_5 - 2I_6 = 0$
M3: $3I_5 - 4I_4 - 2I_2 = 3I_5 - 6I_4 = 0$

Zes onafhankelijke vergelijkingen: K1, K2, K4, M1, M2, M3.

Onderdeel b)
De vervangingsweerstand R_v van de drie weerstanden is:

$$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{R_1 + R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R + R} + \frac{1}{2R} = \frac{2}{2R} = \frac{1}{R}$$

En dus $R_v = R$.

Direct na het sluiten van de schakelaar ($t = 0$) zit er nog geen lading op de condensator en werkt de condensator als een kortsluiting. De weerstand van de kring wordt dan bepaald door $R_v = R$ en de stroom die loopt is $I = \frac{V_0}{R}$. Na lange tijd ($t = \infty$) is de condensator volledig opgeladen en kan de gelijkspanningsbron geen lading meer toevoegen en loopt er geen stroom meer dus $I = 0$.

Onderdeel c)
We kiezen de positieve lading op de bovenste condensatorplaat en gebruiken Kirchhoff 2 voor de maas (met de klok mee):

$$V_0 - \frac{Q}{C} - IR = 0 \Rightarrow -\frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} - R\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC}I$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking is $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, waarbij $I_0 = \frac{V_0}{R}$.

Onderdeel d)
Definieer stromen I (door de spanningsbron naar boven), I_1 (door de verticale weerstand naar beneden) en I_2 (door de spoel naar beneden).

Kirchhoff 1,

$$I = I_1 + I_2$$

Kirchhoff 2 (met de klok mee),

$$V_0 - IR - I_1 R = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{V_0 - IR}{R}$$

$$I_1 R - I_2 Z_L = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{R}{Z_L} I_1 = \frac{R}{Z_L} \frac{V_0 - IR_1}{R}$$

En dit invullen in de knoopvergelijking geeft de stroom in de complexe schrifwijze,

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_0}{R} - I + \frac{V_0}{Z_L} - I\,\frac{R}{Z_L} \Rightarrow I = \frac{\frac{V_0}{R}\left(1 + \frac{R}{Z_L}\right)}{\left(2 + \frac{R}{Z_L}\right)} = \frac{V_0}{R}\frac{(i\omega L + R)}{(2i\omega L + R)}$$

Voor de reële schrijfwijze

$$|I| = \left| \frac{V_0}{R}\frac{(i\omega L + R)}{(2i\omega L + R)} \right| = \frac{V_0}{R}\frac{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}{\sqrt{4\omega^2 L^2 + R^2}}$$

En $\arg(I) = \arg(V_0) + \arg(i\omega L + R) - \arg(R) - \arg(2i\omega L + R)$

$$= 0 + \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) - 0 - \tan^{-1}\left(\frac{2\omega L}{R}\right)$$

Zodat

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\frac{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}{\sqrt{4\omega^2 L^2 + R^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Met $\varphi = \arg(\mathrm{I}) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2\omega L}{R}\right)$

Opgave 2)

Onderdeel a)
De wet van Ampère in integrale vorm is:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Onderdeel b)
Gebruik de rotatiestelling,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

Dus de wet van Ampère in differentiële vorm,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Onderdeel c)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi s = \mu_0 I_0 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\varphi}$$

Onderdeel d)
Voor het dalende half oneindige stuk:

$\theta_1 = -\frac{\pi}{2}, \theta_2 = 0, s = a$ en dus $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$; richting is papier in.

Voor ieder van de drie schuine stukken:

$\theta_1 = -\frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{4}, s = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$ en dus $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{1}{2}\sqrt{2}a}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$; de richting is papier in.

Voor het half oneindige horizontale stuk:

$\theta_1 = -\frac{\pi}{2}, \theta_2 = 0, s = a$ en dus $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$; richting is papier uit.

Kies bijvoorbeeld de $\hat{z}$-richting het papier uit; dan vinden we voor $\vec{B}$ in P,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\hat{z} - 3\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{z} - \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\hat{z} = -\frac{3\mu_0 I}{2\pi a}\hat{z}$$

Opgave 3)

Onderdeel a)
Gebruik de wet van Gauss voor een cilindervormig Gaussoppervlak met lengte L en straal s. Het veld is vanwege cilindersymmetrie in de $\hat{s}$-richting.

Binnen de cilinder ($s \leq R_0$) geldt

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2\pi s L E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\pi s^2 L \rho_0}{\varepsilon_0}$$

en dus

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 s}{2\varepsilon_0}\hat{s}$$

Buiten de cilinder ($s > R_0$) geldt

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2\pi s L E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\pi R_0^2 L \rho_0}{\varepsilon_0}$$

en dus

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 R_0^2}{2\varepsilon_0 s}\hat{s}$$

Onderdeel b)
Idem aan onderdeel a) maar nu moet ook de ladingsdichtheid geïntegreerd worden omdat deze afhangt van s.

Binnen de cilinder ($s \leq R_0$) geldt

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2\pi s L E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{L\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^s 2\pi \acute{s} \frac{1}{1+\alpha\acute{s}} d\acute{s} = \frac{2\pi L \rho_0}{\alpha^2 \varepsilon_0}(\alpha\acute{s} - \ln(1+\alpha\acute{s}))\Big|_0^s$$
$$= \frac{2\pi L \rho_0}{\alpha^2 \varepsilon_0}(\alpha s - \ln(1+\alpha s))$$

en dus

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{\alpha^2 \varepsilon_0 s}(\alpha s - \ln(1+\alpha s))\hat{s}$$

Buiten de cilinder ($s > R_0$) geldt

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2\pi sLE = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{L\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^{R_0} 2\pi\acute{s}\frac{1}{1+\alpha\acute{s}}d\acute{s} = \frac{2\pi L\rho_0}{\alpha^2\varepsilon_0}(\alpha\acute{s} - \ln(1+\alpha\acute{s}))\Big|_0^{R_0}$$
$$= \frac{2\pi L\rho_0}{\alpha^2\varepsilon_0}(\alpha R_0 - \ln(1+\alpha R_0))$$

en dus

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{\alpha^2\varepsilon_0 s}(\alpha R_0 - \ln(1+\alpha R_0))\hat{s}$$

Onderdeel c)
Alle vrije lading zit op de binnenste cilinder, dus we passen de wet van Gauss toe voor de elektrische verplaatsing $\vec{D}$ op een Gauss cilinder met straal $R_0 < s < R_1$.

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = 2\pi sLD = Q_{free,enc} = \rho_0 \pi R_0^2 L$$

dus

$$\vec{D} = \frac{\rho_0 R_0^2}{2s}\hat{s}$$

en
$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\rho_0 R_0^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r s}\hat{s}$$

Onderdeel d)
Bepaal eerst de polarisatie met,

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{\rho_0 R_0^2}{2s}\hat{s}$$

De gebonden ruimtelading volgt dan uit,

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{\rho_0 R_0^2}{2}\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}s\left(\frac{1}{s}\right) = 0$$

De gebonden oppervlaktelading is,

Het binnenoppervlak van de holle cilinder (minteken omdat $\hat{n} = -\hat{s}$),

$$\sigma_b\,(s = R_0) = \vec{P}(s = R_0) \cdot \hat{n} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{\rho_0 R_0}{2}\hat{s}$$

Het buitenoppervlak van de holle cilinder,

$$\sigma_b\,(s = R_1) = \vec{P}(s = R_1) \cdot \hat{n} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{\rho_0 R_0^2}{2R_1}\,\hat{s}$$

De totale gebonden lading is nul: $2\pi R_0 L \sigma_b\,(s = R_0) + 2\pi R_1 L \sigma_b\,(s = R_1) = 0$

Opgave 4)

Onderdeel a)
Het doel is de potentialen in een vorm van een reeksontwikkeling in machten van $\frac{1}{r}$ te schrijven. r is de afstand van de bron (lading of stroom) naar het punt waar we de potentiaal willen weten. Hoe verder we van de bron af zijn, hoe minder belangrijk de hogere orde termen zijn. Dus ver van de bron kunnen we volstaan met enkel de eerste termen in de som die niet nul zijn om de potentiaal van de bron in goede benadering te beschrijven.

Onderdeel b)
K_1 is de netto lading van de ladingsverdeling. $\vec{L}_1$ is nul, er zijn geen magnetische monopolen.

Onderdeel c)
Fysisch:
twee ladingen *q* met verschillend teken op afstand *d*. *p*=*qd*
kringstroom *I* om oppervlak *A*. *m*=*IA*
Mathematisch:
Afstand en oppervlak gaan naar nul; lading en stroomsterkte gaat naar oneindig, terwijl *p* en *m* constant blijven.
Velden zijn identiek op grote afstand maar niet vlakbij de dipool.

Onderdeel d)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_o m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\hat{r} + \sin(\theta)\hat{\theta})$$

Onderdeel e)

$$\vec{m} = I\int d\vec{a} = I\pi a^2 \hat{z}$$

De richting van het magnetisch dipoolmoment volgt uit de rechterhandregel.

Onderdeel f)

Maak rechthoekige strips met breedte *dx* over de dunne linten. Het magnetisch dipoolmoment van een dergelijke rechthoek is dan,

$$dm = I(x)2xL = Kdx2xL = 2LKxdx$$

De strip loopt in de *x*-richting van *a* naar *b* dus het totale magnetische dipoolmoment is,

$$m = \int dm = \int_a^b 2LKxdx = LK\,(b^2 - a^2)$$

De richting van het magnetisch dipoolmoment is de *x*-richting (rechterhandregel. Dus

$$\vec{m} = LK(b^2 - a^2)\hat{z}$$